ANTON KUZMIN
INF07

Projekt ke zkoušce z:

MATEMATICKÉ ANALÝZY 1

Téma:

Exponenciální funkce a Logaritmická funkce (Maple)

V Olomouci, dne 29.1.2008

1. Exponenciální funkce:

1.1. Definice

Exponenciální funkce a^x může být definována jako nekonečná řada. Především se definuje za pomoci mocninné řady:

$$a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots, \text{ pro } x \in R, n \in N$$

1.2. Vlastnosti

- exponenciální funkce je prostá a monotónní
- exponenciální funkce není periodická
- exponenciální funkce je na celém definičním oboru spojitá
- exponenciální funkce je zdola omezená (např. 0)
- exponenciální funkce nemá v žádném bodě ani maximum, ani minimum
- pro a > 1 je exponenciální funkce rostoucí a pro 0 < a < 1 je klesající
- exponenciální funkce je na celém definičním oboru konvexní (nezávisle na velikosti základu a)
- bod [0,1] vždy náleží grafu exponenciální funkce
- inverzní funkcí k exponenciální funkci je funkce logaritmická
- zvláštní význam má exponenciální funkce o základu e, jejíž růst (derivace) je přesně rovna její hodnotě (Eulerovo číslo)
- pravidla pro práci s exponenciálními funkcemi:

  $a^0 = 1$

  $a^1 = a$

  $a^{x+y} = a^x a^y$

  $a^{xy} = (a^x)^y$

  $\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

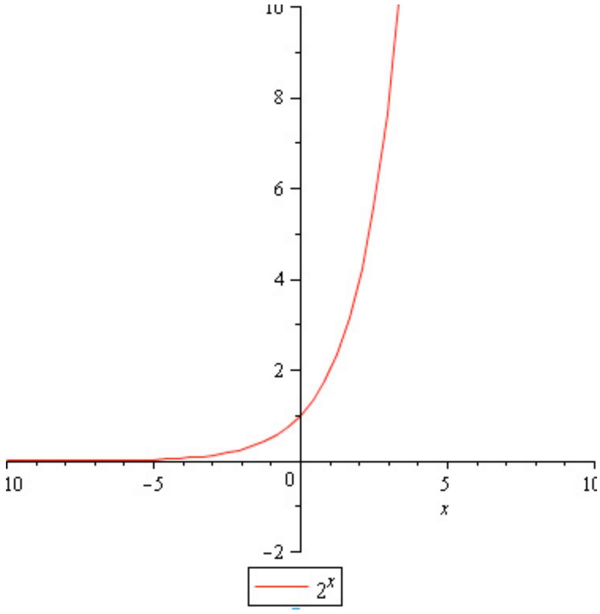
  $a^x b^x = (ab)^x$

1.3. Derivace a integrace exponenciální funkce:

- při derivaci exponenciální funkce o základu a^x vznikne a^x krát přirozený logaritmus a^x $[a^x \ln a^x]$
- při derivaci exponenciální funkce o základu Eulerovým číslem e^x se exponenciální funkce nezmění a zůstane stále e^x
- při integraci a^x vznikne $\frac{a^x}{\ln a} + c$
- při integraci exponenciální funkce o základu Eulerovým číslem e^x se exponenciální funkce nezmění a zůstane stále e^x + c (konstanta)

1.4. Graf

- grafem exponenciální funkce je exponenciála

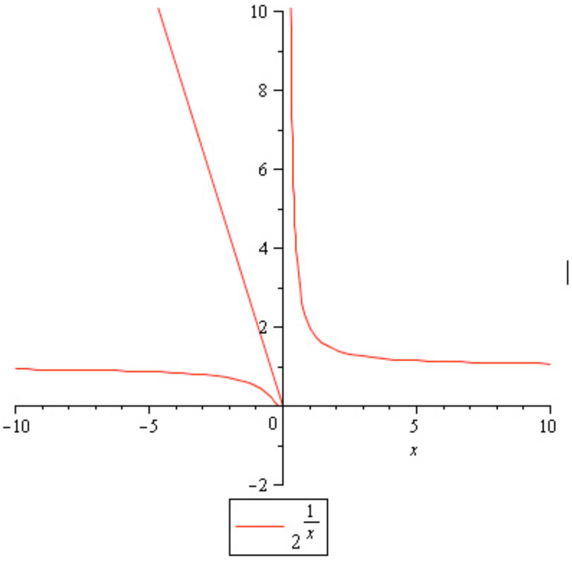


1.5. <u>Příklady využití</u>

- exponenciální funkce se využívá hlavně v matematických rovnicích
- Fourierova transformace (Fyzika)

1.6. <u>Použití v programu Maple a Maple Calculator</u>

- $plot\left(2^x\right)$ - příkaz *plot* vykresli graf funkce, dají se mu zadat parametry horizontální osy i vertikální osy (infinity)
- Graph(exp(X^2-1)) - v Maple Calculator



1.7. <u>Počítané příklady</u>

- viz. Příloha 1

2. Logaritmická funkce:

2.1. Definice

- Inverzní funkci k exponenciální funkci nazýváme logaritmus a označujeme ji *log*
- je definována pouze pro kladná a, je prostá, pro rostoucí, pro klesající, neomezená zdola ani shora, graf prochází bodem [1,0], protože 0 mocnina jakéhokoliv a je 1, i bodem [a,1], protože 1 mocnina jakéhokoliv a je a, pro $a \neq 0$.
- řada pro počítání přirozeného logaritmu:

$$\ln(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{n}(a-1)^n \text{ když } |a-1| < 1 \text{, pro a} \in \mathrm{R}$$

2.2. Vlastnosti

- logaritmická funkce není periodická
- logaritmická funkce je spojitá na celém definičním oboru
- logaritmická funkce není ohraničená (zdola ani shora)
- pro a > 1 je logaritmická funkce rostoucí a pro 0 < a < 1 je klesající
- inverzní funkcí k logaritmické funkci je funkce exponenciální
- přirozený logaritmus - logaritmus o základu *e* se označuje jako přirozený logaritmus (někdy také *Napierův* podle *Johna Napiera*) a značí se *ln a*
- pravidla pro práci s logaritmickými funkcemi:

  $a^{\log_a x} = \log_a a^x = x$

  $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$

  $\log_c \frac{a}{b} = \log_c b - \log_c a$

  $\log_b a^r = r \log_b a$

  $\log_b b = 1$

  $\log_b 1 = 0$
- převod logaritmu na jiný základ:

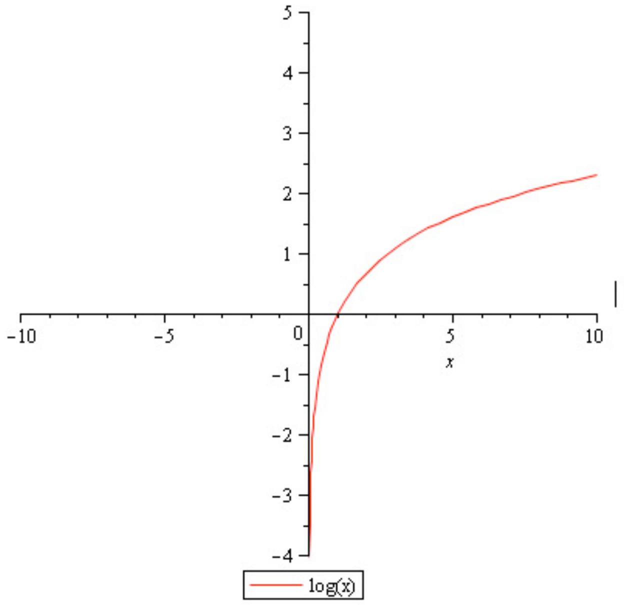
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a b \log_b x$$

2.3. Derivace a integrace logaritmické funkce:

- při derivaci logaritmické funkce o základu a s neznámou x [$\log_a x$], vznikne $\frac{1}{x \ln a}$
- při derivaci přirozeného logaritmu s neznámou x [$\ln x$], vznikne $\frac{1}{x}$
- při integraci zlomku $\frac{1}{x}$ vznikne $\ln x$, téhle vlastnosti se opravdu často využívá

2.4. Graf

- grafem logaritmické funkce je logaritmická křivka



2.5. Příklady využití

Logaritmy se objevují také v mnoha vědeckých oborech pro vyjádření závislosti na exponentu. Příklady jsou:

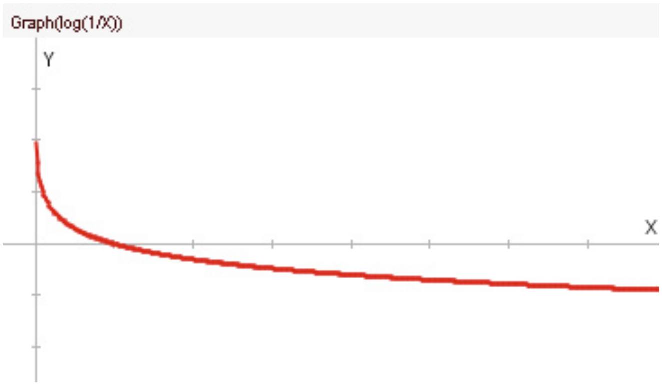
- jednotka decibel (fyzika)
- vyjadřování hvězdné velikosti (astronomie)
- vyjadřování kyselosti látek pomocí pH (chemie)

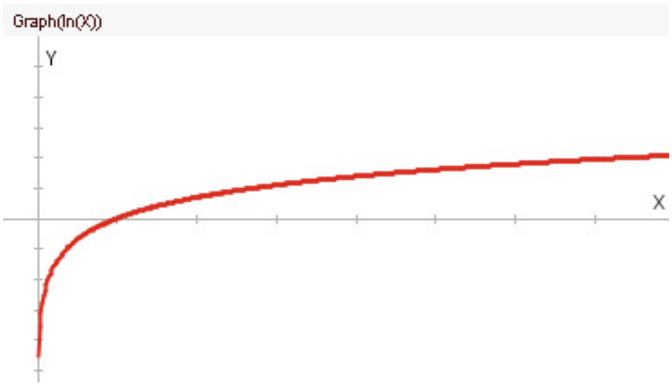
2.6. Použití v programu Maple

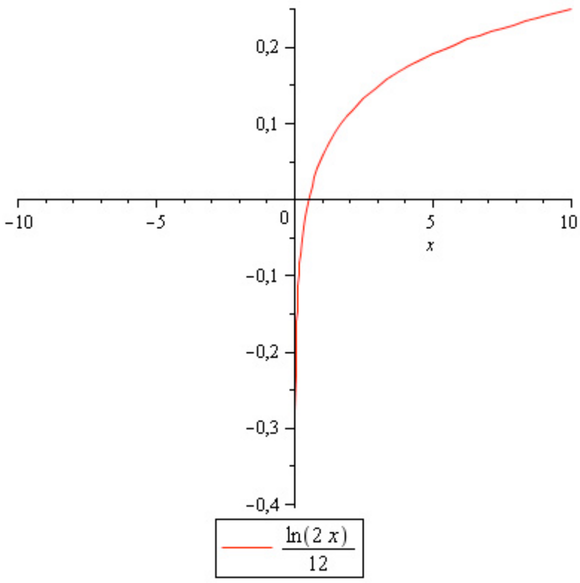
- $plot(\log(x))$ - příkaz *plot* vykresli graf funkce, dají se mu zadat parametry horizontální osy i vertikální osy (infinity)
- Graph(log(X^2))
- $plot\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$
- Graph(ln(2X/12))

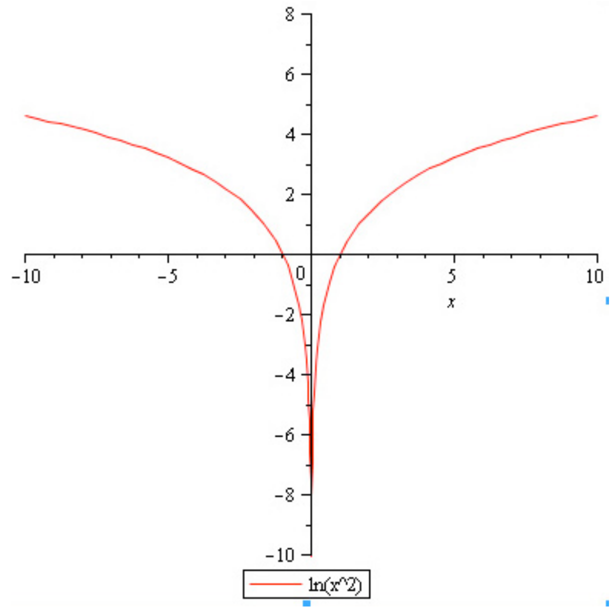
2.7. Počítané příklady

- viz. Příloha 1



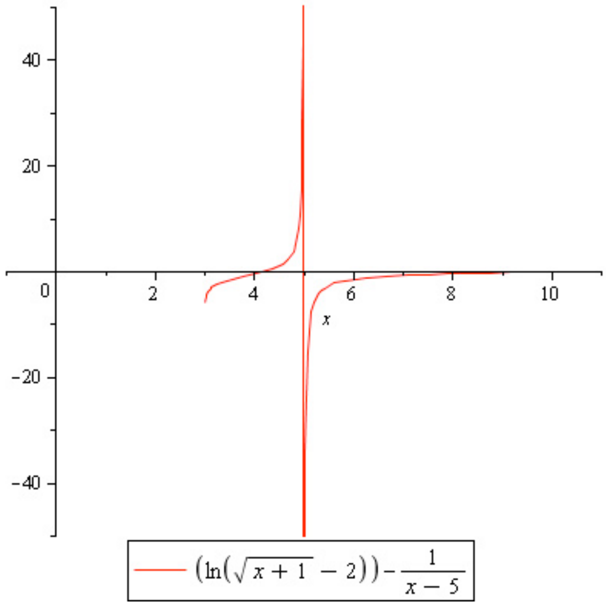


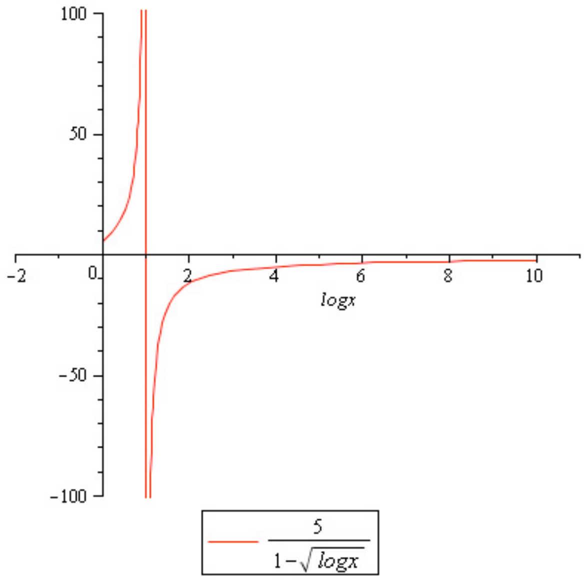

0,2
0,1
-10
-5
0
5
10
x
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
$\frac{\ln(2x)}{12}$


8
6
4
2
-10
-5
0
5
10
x
-2
-4
-6
-8
-10
ln(x^2)

3. Zdroje:

[1] www.wikipedia.cz a www.wikipedia.org (překlad z ANG do CZ, sám)
[2] Doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc., Matematická analýza pro učitele (První díl), Matfyzpress, Praha 2001, ISBN 80-85863-62-6


40
20
0
2
4
6
8
10
x
-20
-40
$(\ln(\sqrt{x+1}-2))-\frac{1}{x-5}$


100
50
-2
0
2
4
6
8
10
logx
-50
-100
$\frac{5}{1-\sqrt{logx}}$